Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Full núm. 1 — Nombre total de fulls 8 — Qualificació

Cognoms: EXAMEN DE TRANSMISION DE DATOS
Nom:
Centre: RESOLUCIÓN
Assignatura / especialitat: Permutación φ
DNI — Núm. matrícula — Curs — Grup — Data: 18-01-02

(1)

$$c^{(n+1)} = \Delta\cdot R_{ay} + (I - \Delta\cdot R_y)\cdot c^{(n)}$$

$$R_y(k) = E\{a^2\}\cdot \rho_x(k) + \sigma_\eta^2\cdot \delta(k)$$

$$R_{ay}(k) = E\{a^2\}\cdot x(-k)$$

$E\{a^2\} = 5$

$\rho_x(0) = 1'0225$

$\rho_x(1) = 0'15$ $\qquad \rho_x(2) = 0$

$x(-1) = 0$

$x(0) = 1$

$x(1) = 0'15$

$$\begin{pmatrix} c_{-1}^{n+1} \\ c_0^{n+1} \\ c_1^{n+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{c}_{-1} \\ \hat{c}_0 \\ \hat{c}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0'0019371 \\ -0'0030957 \\ -0'023537 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_{-1}^{n+2} \\ c_0^{n+2} \\ c_1^{n+2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{c}_{-1} \\ \hat{c}_{-1} \\ \hat{c}_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0'00078653 \\ 0'0011487 \\ 0'00084584 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_{-1}^{n+1} \\ c_0^{n+1} \\ c_1^{n+1} \end{pmatrix} = \Delta\cdot\begin{pmatrix} 5\cdot 0'15 \\ 5\cdot 1 \\ 5\cdot 0 \end{pmatrix} + \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \Delta\cdot\begin{pmatrix} 5\cdot 1'0225 + \sigma_\eta^2 & 5\cdot 0'15 & 0 \\ 5\cdot 0'15 & 5\cdot 1'0225 + \sigma_\eta^2 & 5\cdot 0'15 \\ 0 & 5\cdot 0'15 & 5\cdot 1'0225 + \sigma_\eta^2 \end{pmatrix}\right\}\cdot\begin{pmatrix} c_{-1}^{n} \\ c_0^{n} \\ c_1^{n} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_{-1}^{n+2} \\ c_0^{n+2} \\ c_1^{n+2} \end{pmatrix} = \Delta\cdot\begin{pmatrix} 0'75 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \Delta\cdot\begin{pmatrix} 5'1125 + \sigma_\eta^2 & 0'75 & 0 \\ 0'75 & 5'1125 + \sigma_\eta^2 & 0'75 \\ 0 & 0'75 & 5'1125 + \sigma_\eta^2 \end{pmatrix}\right\}\cdot\begin{pmatrix} c_{-1}^{n+1} \\ c_0^{n+1} \\ c_1^{n+1} \end{pmatrix}$$

por ahí no va...
Me molesta ——— esto...

$$\begin{aligned} \underline{c}^{n+1} &= \Delta\cdot R_{ay} + (I-\Delta\cdot R_y)\cdot \underline{c}^{n} \\ \hat{\underline{c}} &= \Delta\cdot R_{ay} + (I-\Delta\cdot R_y)\cdot \hat{\underline{c}} \end{aligned}$$

$$\underbrace{\underline{c}^{n+1}-\hat{\underline{c}}}_{\text{error en la iteración } (n+1)} = (I-\Delta\cdot R_y)\cdot \underbrace{(\underline{c}^{n}-\hat{\underline{c}})}_{\text{error en la it. } (n)}$$

$$\Rightarrow \underline{c}^{n+2}-\hat{\underline{c}} = (I-\Delta\cdot R_y)\cdot(\underline{c}^{n+1}-\hat{\underline{c}})$$

$$\begin{pmatrix} 0'00078653 \\ 0'0011487 \\ 0'00054584 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \Delta\cdot\begin{pmatrix} 1'1125+\sigma_\eta^2 & 0'75 & 0 \\ 0'75 & '' & 0'75 \\ 0 & 0'75 & '' \end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix} -0'0019371 \\ -0'0030957 \\ -0'023537 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-\Delta\cdot(1'1125+\sigma_\eta^2) & -0'75\cdot\Delta & 0 \\ -0'75\cdot\Delta & 1-\Delta\cdot(1'1125+\sigma_\eta^2) & -0'75\cdot\Delta \\ 0 & -0'75\cdot\Delta & 1-\Delta\cdot(1'1125+\sigma_\eta^2) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -0'0019371 \\ -0'0030957 \\ -0'023537 \end{pmatrix}$$

$$-0'0019371 + \Delta\cdot 0'0019371\cdot(1'1125+\sigma_\eta^2) + 0'75\cdot\Delta\cdot 0'0030957 = 0'00078653$$

c) ¿ $\Delta = 0'22$ $\quad \sigma_\eta^2 = 0'08$? $\qquad 0'00078653 \neq 0'00078653$

Y con los otros 2 nºs también se cumple.

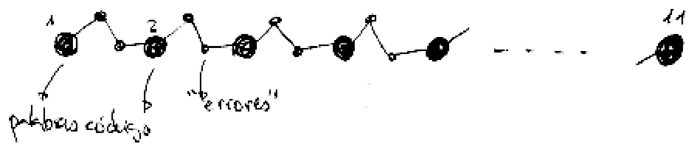
Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Full núm. 2 | Nombre total de fulls 8 | Qualificació

Cognoms | Nom
Centre
Assignatura / asignatura
DNI | Núm. matrícula | Curs | Grup | Data

(2) ⇒ Se necesita un código 1-perfecto. Así pasa siempre lo mismo. (*)

$e = 1 \Rightarrow d_{min} = 2e+1 = 3$



Código (15, 11)

$n = 2^r - 1$

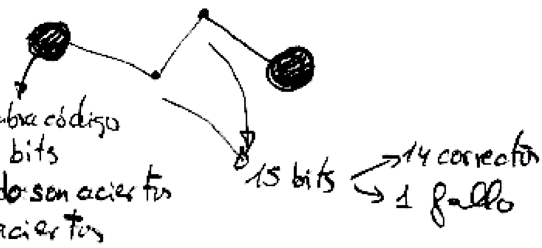
$r=3 \to n=7 \to k=4 \Rightarrow$ código (7,4)

⇒ $r=4 \to n=15 \to k=11 \Rightarrow$ código (15,11)

Hay 2^{11} palabras código.

⇒ Hemos de codificar 2^{15} palabras, 2^{15} resultados posibles.
Quiero equivocarme sólo en un resultado.

(*)



Entre 2 palabras código siempre hay distancia 3.

⇒ Hay que apostar por todas las palabras código.
Hay 2^{11} palabras código.

(3) $C = W \cdot \log_2(1 + \frac{S}{N}) = 1500 \cdot \log_2(1 + 10^{0'28}) = 2308'150424$ bps

C: V_t máxima

Información <u>máxima</u> transmitida $= C \cdot t = C \cdot 12'3 = 28390'25022$ bits

H= Entropía máxima = $\frac{\text{Inform. máx. Media}}{} = \frac{28390'25022}{10^6} = 0'02839025022$

$H = p_c \cdot \log_2 \frac{1}{p_c} + (1-p_c) \cdot \log_2 \frac{1}{1-p_c} = 0'02839025022$

a) ¿$p_c = 0'818$? $\Rightarrow 0'2370786924 + 0'4473541154 = 0'6844328078$

NO.

b) ¿$p_c = 0'673$? $\Rightarrow 0'3844994301 + 0'5273324491 = 0'9118318792$

NO.

c) ¿$p_c = 0'997$? $\Rightarrow 0'004321586376 + 0'02514246535 = 0'02946405173$

d) Parece ser esta...

(4) $\emptyset \leq H(A) \leq \log_2 A$ → La entropía es máxima si los símbolos son equiprobables.

$H(x) = \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{p} \cdot \log_2 \frac{1}{p}$, $p = \frac{1}{A}$. $A = 3 \Rightarrow H(A) \leq \log_2 3$

$H(A) \geq H(A \backslash B)$ $\Rightarrow$ "La información de A decrece si conozco más información, la relacionada con B"

Si $H(A \backslash B) = \log_2 3 \Rightarrow H(A) = \log_2 3$

$H(B) \leq \log_2 3 \Rightarrow \left[H(B) \leq H(A) \right]$

Cognoms Nom
Centre
Assignatura / assignatura
DNI Núm. matrícula Curs Grup Data

5

Diccionario

000	0	A
001	1	B
010	2	C
011	3	AB
100	4	BA
101	5	ABC
110	6	
111	7	

A B A BC → (0) (1) (3) (2) ⇒ 4 punteros

Necesito 3 bits para codificar cada entrada al diccionario. ⇒ 3 bit/puntero ⇒ 12 bits //

6

$W = 4000\ Hz$ $A = 16 \Rightarrow q = 4$ bits/símbolo

$GAH \rightarrow v_m = \frac{W}{1+\alpha} = \frac{4000}{1'25} = 3200$ baudios

$v_t \left[\frac{bits}{seg}\right] = q \left[\frac{bits}{símbolo}\right] \cdot v_m \left[\frac{símbolo}{seg}\right]$

$v_t = 4 \cdot 3200 = 12.800$ bps

1-perfecto $\Rightarrow n = 2^r - 1$

$r = 3 \Rightarrow n = 7 \Rightarrow k = 4 \Rightarrow$ Código (7,4)

Información $= I = 8 \cdot 10^6 \cdot \frac{7}{4}$ bits $= 14.000.000$ bits

tiempo (seg) $= \frac{I}{v_t} = \frac{14 \cdot 10^6}{12'8 \cdot 10^3} = 1093'75$ seg //

(7) $Y_1 = 00|000$ Código$(\overset{n}{5}, \overset{k}{2})$

$Y_2 = 01|111$

$Y_3 = 10|111$

$Y_4 = 11|110$

$k=2 \quad r=3$

$\leftarrow n=5 \rightarrow$

a) $Y_2 + Y_3 = 11000 \neq Y_4$

no es lineal.

b) c) Al ser no lineal, no puedo usar que:

$$d_{min} = \min_{y_K} W(y_K)$$

Sino que debo aplicar $d_{min} = MIN\ d(y_i, y_K) =$

$$= MIN\ d(y_i \oplus y_K)$$

$Y_2 + Y_3 = 11000 \rightarrow W = 2$

$Y_2 + Y_4 = 10001 \rightarrow W = 2$

$\Rightarrow d_{min} = 2$

Capacidad detectora (de errores, claro): $\delta = d_{min} - 1 = 1$ //

(8) $H(V) = P(I=1) \cdot H(V \setminus I=1) + P(I=X) \cdot H(V \setminus I=X) + P(I=2) \cdot H(V \setminus I=2)$

$= 0'5 \cdot 1'570949 + 0'3 \cdot 1'48547 + 0'2 \cdot 1'570949$

$= 1'5453053$ // bits

$H(V \setminus I=1) = 0'4 \cdot \log_2 \frac{1}{0'4} + 0'3 \cdot \log_2 \frac{1}{0'3} + 0'3 \cdot \log_2 \frac{1}{0'3} =$

$= 0'528771 + 0'521089 \cdot 2 = 1'570949$

$H(V \setminus I=X) = 0'5 \cdot \log_2 \frac{1}{0'5} + 0'3 \cdot \log_2 \frac{1}{0'3} + 0'2 \cdot \log_2 \frac{1}{0'2} =$

$= 0'5 + 0'521089 + 0'464385 = 1'48547$

$H(V \setminus I=2) = 0'3 \cdot \log_2 \frac{1}{0'3} + 0'4 \cdot \log_2 \frac{1}{0'4} + 0'3 \cdot \log_2 \frac{1}{0'3} =$

$= 2 \cdot 0'521089 + 0'528771 = 1'570949$

9 b) El código no es lineal, pues no incluye a 00000000.

No forma subespacio vectorial.

Además, la suma de 2 palabras código no da otra palabra código: $\underset{\in C}{00001111} \oplus \underset{\in C}{11110000} = \underset{\notin C}{11111111}$

a) Como el código no es lineal, no puedo usar que:

$$d_{min} = \min_{y_K} W(y_K) = \min_{y_K} 4 = 4$$

todas las palabras pesan 4.

He de usar: $d_{min} = \text{MIN}\ d(y_i, y_K) = \text{MIN}\ W(y_i \oplus y_K) =$

= Menor nº de bits en que difieren 2 palabras código.

$d(00001111, 00011110) = 2$

$W(00001111 \oplus 00011110) = W(00010001) = 2$

c) Permutaciones con repetición, de 8 elementos con 4 unos y 4 ceros:

$$PR_{4,4} = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = 70 \text{ palabras}$$

⇒ Problema típico de combinatoria.

(10) Sin codificador

$$P_{error}(\text{bloque}) = \sum_{i=1}^{n=100} \binom{n}{i} \cdot p^{i} \cdot (1-p)^{n-i} \simeq \binom{100}{1} (10^{-3})^{1} \cdot (1-10^{-3})^{99}$$

$$\simeq 10^{2} \cdot 10^{-3} = 10^{-1}$$

Con codificador

$$P_{error}(\text{bloque}) = \sum_{i=e+1}^{n=100} \binom{n}{i} \cdot p^{i} \cdot (1-p)^{n-i} \simeq \binom{100}{6} \cdot (10^{-3})^{6} \cdot (1-10^{-3})^{94}$$

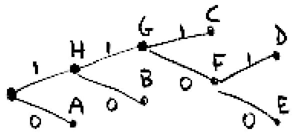
$$\simeq \binom{100}{6} \cdot 10^{-18} = \frac{100!}{6! \cdot 94!} \cdot 10^{-18} =$$

$$= \frac{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96 \cdot 95}{720} \cdot 10^{-18} = 1'192 \cdot 10^{-9}$$

$$\text{Reducción} = \frac{10^{-1}}{1'192 \cdot 10^{-9}} = 83892617'45 \simeq 8'4 \cdot 10^{7} \text{ veces}$$ //

(11)

A 0.45	A 0.45	A 0.45	H 0.55
B 0.25	B 0.25	G 0.3 } 0.55 H	A 0.45
C 0.15	C 0.15 } 0.3 G	B 0.25	
D 0.1 } 0.15 F	F 0.15		
E 0.05			



A	0
B	10
C	111
D	1101
E	1100

$$H = 0.25 \cdot \log_2 \frac{1}{0.25} + 0.45 \cdot \log_2 \frac{1}{0.45} + 0.15 \cdot \log_2 \frac{1}{0.15} + 0.1 \cdot \log_2 \frac{1}{0.1} + 0'05 \cdot \log_2 \frac{1}{0'05} =$$

$$= 0'5 + 0'5184 + 0'4105 + 0'3322 + 0'2161 = 1'9772 \text{ bits}$$

$$\bar{L} = 1 \cdot 0'45 + 2 \cdot 0'25 + 3 \cdot 0'15 + 4 \cdot 0'1 + 4 \cdot 0'05 = 2$$

$$E = \frac{H}{\bar{L}} = 0'9886$$ //

Full núm. 5
Nombre total de fulls 8
Qualificació

Cognoms Nom
Centre
Assignatura / especialitat
DNI Núm. matrícula Curs Grup Data

(12) $D \equiv 0100$ (M.P.D)

a) $D \cdot p^{(n)}(D) = c(D) + p^{n+1}(D)$
$D \cdot p^{n}(D) = p^{(n+1)}(D)$

- o la una, o la otra funcionan.
- Sólo 1.

$L = 2^m - 1 = 2^4 - 1 = 15$, al ser primitivo $c(D)$.

$15 \times 4 = 60 \Rightarrow p^{(0)}(D) = p^{(15)}(D) = p^{(60)}(D) = D$

He de ir dos iteraciones hacia atrás.

$D \cdot p^{59} = p^{60} = D \Rightarrow p^{59}(D) = 1$

$D \cdot p^{58} = c(D) + p^{59}(D) = D^4 + D^3 + 1 + 1 = D^4 + D^3$

$\Rightarrow p^{(58)}(D) = D^3 + D^2 \equiv \underset{1\ D\ D^2\ D^3}{0011}$

c) $p^{(n)}(D) = D^n \cdot p^{(0)}(D) \bmod c(D)$

$p^6(D) = D^6 \cdot D \bmod c(D) \Rightarrow p^{(6)}(D) = D^2 + D + 1$

$$
\begin{array}{l|l}
D^7 & D^4 + D^3 + 1 \\
\hline
D^7 + D^6 + D^3 & D^3 + D^2 + D + 1 \\
\hline
D^6 + D^3 & \\
D^6 + D^5 + D^2 & \\
\hline
D^5 + D^3 + D^2 & \\
D^5 + D^4 + D & \\
\hline
D^4 + D^3 + D^2 + D & \\
D^4 + D^3 + 1 & \\
\hline
D^2 + D + 1 = p^{(6)}(D) &
\end{array}
$$

(13) Código (7,4) Hamming: ⟶ D ⇒ e = 1

$$H(r \times n) = (-P^T \mid I_r) = \left(\begin{array}{cccc|ccc} x & x & x & x & 1 & 0 & 0 \\ x & x & x & x & 0 & 1 & 0 \\ x & x & x & x & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = H(3,7)$$

filas columnas

$r = n - k \Rightarrow$ Tiene $2^r - 1$ columnas

e = 1:

1 síndrome ⟺ 1 columna H $\begin{cases} - \text{distintas} \\ - \neq \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \\ - \forall \text{ orden} \end{cases}$

$\begin{cases} \text{Hay } 2^r - 1 \text{ síndromes} \neq \\ \text{Hay } 2^r - 1 \text{ columnas de H} \neq \end{cases}$

(14)

Código:

→	000	000
	001	001
→	010	010
→	011	011
	100	100
datos →	101	101
	110	110
	111	111

Un código cíclico es un código bloque lineal.
Además, este es sistemático.

c) g(D) tiene grado r
$r = n - k = 3$. No puede ser.

b) No es palabra código.

a) $g(D) = D^3 + D^2 + 1$

$X(D) = \overset{D^2 D 1}{010} \equiv D$

$D^r \cdot X(D) = D^3 \cdot D = D^4$

¿ 010 ⟶ 010010 ?

$D^r \cdot X(D) \bmod C(D) = D^2 + D + 1$

$$\begin{array}{l|l} D^4 & D^3 + D^2 + 1 \\ \hline D^4 + D^3 + D & D + 1 \\ \hline D^3 + D & \\ D^3 + D^2 + 1 & \\ \hline D^2 + D + 1 & \end{array}$$

↓

000|111 ≠
≠ 010010
NO

d) Es esta!

15

$$H = \sum_{i=0}^{9} \frac{1}{P} \cdot \log_2 \frac{1}{P} = \log_2 10$$

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{10}$$

$H = \overline{I}$

Fuente genera a tasa $= 1000 \cdot \log_2 10 \quad \frac{\text{digits}}{\text{seg}}$

$$C \geq v_t(\text{fuente}) \geq 1000 \cdot \log_2 10$$

$$C = W \cdot \log_2 (1 + S/N)$$

$$\cancel{10^3} \cdot \log_2 10 \leq \cancel{10^3} \cdot \log_2 (1 + S/N)$$

$$10 \leq 1 + S/N$$

$$9 \leq S/N \quad \rightarrow (S/N)_{min} = 9$$

16

C(D) es completo, $m = 15$.

a) Falso, eso sólo ocurre para C(D) primitivo, y $L = L_{max} = 2^{14} - 1$.

b), c) $\Rightarrow$ Cargando con un estado en el que sólo hay un 1, estoy en el subgrupo de período máximo. Y para C(D) completo, $L_{max} = m + 1 = 16$

Full núm. 7 Qualificació
Nombre total de fulls 8

Cognoms | Nom
Centre: J. Mata
Assignatura / especialitat
DNI | Núm. matrícula | Curs | Grup | Data

Problema 17

cierta a) Cierta
cierta b) F_0 toma A^M valores (cierta)
falsa! c) σ_i toma A^{M+1} valores y no A^{M+1+i} (falsa)
d) No aplica

$\sigma_i(a(i), a(i+1), \ldots a(i+M))$
$\longleftarrow M+1 \longrightarrow$

Problema 18

$x[0] = 0'8 \quad x[1] = 0'6$

$y[0] = 0'6 \quad y[1] = 1'2 \quad y[2] = 0$

Cálculo de $\tilde{y}[j]$

j	$\tilde{y}[j] = y[j]x[0] + y[j+1]\cdot x[1]$
0	$1'2$
1	$0'96$

Cálculo de $\rho_x[i]$

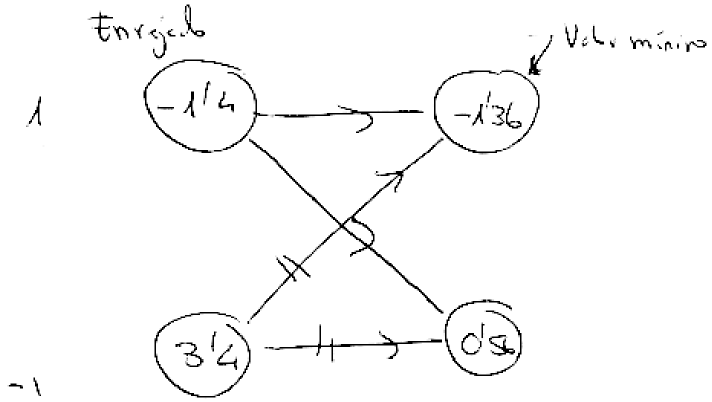
i	$\rho_x[i]$
0	1
1	$0'48$

Cálculo de F_0

$a_k(0)$	$F_0 = a_k^2(0)\,\rho_x(0) - 2a_k(0)\,\tilde{y}(0)$
1	$-1'4$
-1	$3'4$

Cálculo de σ_0

$a_k(0)$	$a_k(1)$	$\sigma_0 = 2a_k(1)\,a_k(0)\,p_x(1) + p_x(0) - 2a_k(1)\,\tilde{y}[1]$
1	1	0'04
1	−1	1'96
−1	1	−1'88
−1	−1	3'88



Secuencia más verosímil (1, 1)

Luego $\hat{y} = (1, 1) * (0'8, 0'6) = (0'8, 1'4, 0'6)$

a) La energía del ruido será:

$$\sum_{i=0}^{2} (y[i] - \hat{y}[i])^2 = 0'44 < 1 \Rightarrow \text{Falsa}$$

b) $\sigma_0\big|_{min} = -1'88 > -2 \Rightarrow$ Falsa

c) $F_1\big|_{min} = -1'36 < 0 \Rightarrow$ Falsa

(II) Calc. F_{min}

(19)

a) R_Y depende de σ^2_η (cierta)

b) Los valores de la diagonal siempre son reales y positivos
R_Y es definida positiva (cierta)

c) Los autovalores son mayores que 0 (cierta)
R_Y es definida positiva

d) Falsa, las anteriores son ciertas

(20)

a) $\Delta_{\text{cond desconocido}} = \dfrac{\Delta_{\text{cond conocido}}}{L_e}$

cierto

b) $\Delta_{\text{cond desconocido}}$ se obtiene a través de $R_{YY}(0)$

cierto

c) Δ ECM se reduce cuanto ~~mayor~~ mayor es la reducción de Δ. Por ello se aplica el cambio de marcha
Por lo tanto, $\Delta\downarrow \Rightarrow \Delta ECM\downarrow$
luego ~~el~~ la afirmación es falsa dado que la relación es contraria.

d) No aplica.